

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 28/5/18

1. Siano $\omega \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{O}$ rispettivamente uno stato e un'osservabile di un sistema fisico. Si verifichi che sono equivalenti:

(a) $\text{Var}(\omega, A) = 0$;

(b) $F_{\omega, A}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < \text{Exp}(\omega, A), \\ 1 & \lambda \geq \text{Exp}(\omega, A); \end{cases}$

(c) la misura di Lebesgue-Stieltjes definita da $F_{\omega, A}$ è $\delta_{\text{Exp}(\omega, A)}$.

2. Siano $U(\alpha), V(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ operatori unitari soddisfacenti le relazioni di Weyl (1-dimensionali). Verificare che posto $W(\alpha + i\beta) := e^{i\alpha\beta/2}U(\alpha)V(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si hanno le *relazioni di Weyl in forma complessa*

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(z_1, z_2)}W(z_1 + z_2), \quad W(z)^* = W(-z), \quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

dove $\sigma(z_1, z_2) = \text{Im } \bar{z}_1 z_2$, e che, viceversa, dati $W(z)$, $z \in \mathbb{C}$, soddisfacenti queste relazioni, gli operatori $U(\alpha) := W(\alpha)$, $V(\beta) := W(i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soddisfano le relazioni di Weyl.