Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 23/5/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con untià e $\omega, \omega' \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$. Si verifichi che ω' è dominato da ω se e solo se esiste $\varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ tale che ω è combinazione convessa di ω' e φ.

2. Siano $\mathscr{A} = M_n(\mathbb{C})$ e $E_{jk} \in \mathscr{A}$ tali che $(E_{jk})_{il} = \delta_{ji}\delta_{kl}$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Dato $\omega \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ e posto $\rho_{jk} := \omega(E_{jk})$, $j, k = 1, \dots, n$, si mostri:
   (a) $\omega(T) = \mathrm{tr}(\rho T)$ per ogni $T \in \mathscr{A}$;
   (b) $\rho \geq 0$ e $\mathrm{tr}\, \rho = 1$;
   *(c) ω è puro se e solo se esiste $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, tale che $\rho = |x\rangle\langle x|$ (cioè $\rho y = \langle x, y\rangle x$ per ogni $y \in \mathbb{C}^n$), e quindi $\omega(T) = \langle x, Tx\rangle$ per ogni $T \in \mathscr{A}$ (sugg.: ρ è diagonalizzabile).

3. Sia π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$. Verificare che un sottospazio chiuso $K \subset H_\pi$ è invariante per π se e solo se il rispettivo proiettore ortogonale P_K appartiene a $\pi(\mathscr{A})'$.

4. Siano π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$ e $A \in \pi(\mathscr{A})'$ autoaggiunto. Si mostri che, se $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ è la famiglia spettrale associata ad A, $P_\lambda \in \pi(\mathscr{A})'$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Sia π una rappresentazione della C-algebra $\mathscr{A}$. Si mostri che π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathscr{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$ (*lemma di Schur*).

6. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra commutativa con unità. Si dimostri che $\mathscr{P}(\mathscr{A}) = \Omega(\mathscr{A})$ (sugg.: $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ se e solo se $\pi_\omega(a) = \omega(a)\mathbb{1}$).