Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 21/5/18

1. Siano μ_1, μ_2 misure di Borel regolari finite su uno spazio metrico X. Mostrare che per ogni $p \in [1, +\infty)$, e per ogni funzione boreliana limitata $f : X \to \mathbb{C}$ esiste una successione $(f_n) \subset C_b(X)$ tale che $f_n \to f$ sia in $L^p(X, \mu_1)$ che in $L^p(X, \mu_2)$.

2. Verificare che l'applicazione $S_f : H \times H \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Bor}(X)$, definita a lezione, è sesquilineare.

3. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita, e $M_f \in B(L^2(X, \mu))$ l'operatore di moltiplicazione per una $f \in L^\infty(X, \mu)$ reale. Calcolare la misura spettrale di M_f.

4. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto. Si mostri che $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste una successione $(x_n) \subset H$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $Ax_n - \lambda x_n \to 0$.

5. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità e ω uno stato di $\mathscr{A}$. Si verifichi
   (a) $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;
   (b) $\omega(b^* a^* a b) \leq \|a\|^2 \omega(b^* b)$ per ogni $a, b \in \mathscr{A}$.