Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 14/5/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ tale che esista $\rho : C(\sigma(A)) \to M_n(\mathbb{C})$ *-omomorfismo iniettivo unitale tale che $\rho(\iota) = A$, $\iota(\lambda) = \lambda$. Mostrare:
   (a) $P_\lambda := \rho(\chi_{\{\lambda\}})$, $\lambda \in \sigma(A)$, è un proiettore, e si ha $P_\lambda P_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$;
   (b) vale
   $$\rho(f) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda, \qquad f \in C(\sigma(A)),$$
   da cui in particolare $\mathbb{1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda$, $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$;
   (c) P_λ è il proiettore sull'autospazio di A associato all'autovalore $\lambda \in \sigma(A)$;
   (d) A è diagonalizzabile tramite matrici unitarie.

   Viceversa se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile tramite matrici unitarie allora esiste $\rho : C(\sigma(A)) \to M_n(\mathbb{C})$ *-omomorfismo iniettivo unitale tale che $\rho(\iota) = A$.

2. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità, e $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ elementi normali tali che $[a_i, a_j] = 0 = [a_i, a_j^*]$, $i, j = 1, \dots, n$. Posto $\mathscr{B} := C^*(\{\mathbb{1}, a_1, \dots, a_n\})$, si mostri:
   (a) la funzione $\varphi : \Omega(\mathscr{B}) \to \sigma(a_1) \times \sigma(a_n) \subset \mathbb{C}^n$ definita da $\varphi(\omega) := (\omega(a_1), \dots, \omega(a_n))$ è continua e iniettiva (l'insieme compatto $X := \varphi(\Omega(\mathscr{B}))$ è detto lo *spettro congiunto* di $a_1, \dots, a_n$);
   (b) esiste un unico *-isomorfismo isometrico unitale $\rho : C(X) \to \mathscr{B}$ tale che $\rho(\iota_k) = a_k$, dove $\iota_k \in C(X)$ è la funzione $\iota_k(\lambda) := \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ (*calcolo funzionale continuo congiunto* di $a_1, \dots, a_n$).

3. Sia $T \in B(H)$, H spazio di Hilbert. Mostrare che $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.

4. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto e tale che esista $C > 0$ per cui $\|Ax\| \geq C\|x\|$ per ogni $x \in H$. Si mostri:
   (a) $\ker A = \{0\}$;
   (b) $\operatorname{ran} A$ è denso in H;
   (c) $\operatorname{ran} A$ è chiuso;
   (d) A è invertibile.