Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 9/5/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano X, Y spazi metrici con X completo, e $f : X \to Y$ isometrica. Mostrare che $f(X) \subset Y$ è chiuso.

2. Siano $\mathscr{B}$ un'algebra di Banach con unità, e $a \in \mathscr{B}$ tale che $\sigma(a) = \{0\}$ (un tale elemento è detto *topologicamente nilpotente*), e sia $\mathscr{A} := \overline{\langle \mathbb{1}, a, a^2, \dots \rangle} \subset \mathscr{B}$ la sottoalgebra chiusa di $\mathscr{B}$ generata da a. Si mostri:

   (a) $x \in \mathscr{A}$ se e solo se $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a^k$ (serie convergente in $\mathscr{B}$);

   (b) $\Omega(\mathscr{A}) = \{\omega_0\}$, con $\omega_0(x) = \lambda_0$;

   (c) la trasformata di Gelfand $\hat{}: \mathscr{A} \to C(\Omega(\mathscr{A}))$ non è iniettiva.

*3. Si dimostri:

   (a) dati $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ la serie
   $$(a * b)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
   è assolutamente convergente e $\|a*b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$; $a*b$ è detto la *convoluzione* di $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$;

   (b) definendo, per $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $a_n^* := \overline{a_{-n}}$, si ha che $\ell^1(\mathbb{Z})$, con il prodotto di convoluzione, è una *-algebra di Banach commutativa con identità;

   (c) l'elemento $\zeta := (\delta_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ è tale che, rispetto alla convoluzione, $\zeta^{-1} = (\delta_{n,-1})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $\langle \zeta^n : n \in \mathbb{Z} \rangle$ è denso in $\ell^1(\mathbb{Z})$;

   (d) per ogni $\lambda \in \mathbb{T}$, $\omega_\lambda : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ definito da
   $$\omega_\lambda(a) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \lambda^n, \qquad a \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$
   è un carattere di $\ell^1(\mathbb{Z})$;

   (e) per ogni $\omega \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ esiste un'unico $\lambda \in \mathbb{T}$ tale che $\omega = \omega_\lambda$ (sugg.: $\lambda := \omega(\zeta)$);

   (f) l'applicazione $\lambda \in \mathbb{T} \mapsto \omega_\lambda \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ è biunivoca, continua e con inversa continua (cioè è un *omeomorfismo* di spazi topologici) (sugg.: l'inversa $\omega \mapsto \omega(\zeta)$ è continua da uno spazio compatto a uno di Hausdorff);

   (g) identificando, come spazi topologici, $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ con il cerchio unitario $\mathbb{T}$ tramite l'applicazione del punto (f), la trasformata di Gelfand di $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ si identifica con la funzione $\hat{a} \in C(\mathbb{T})$ data da
   $$\hat{a}(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T},$$
   cioè con la serie (o la trasformata) di Fourier della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

4. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ un sottoinsieme, e

$$C^*(\mathscr{S}) := \bigcap \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ C*-sottoalgebra contenente } \mathscr{S}\}.$$

la C*-sottoalgebra di $\mathscr{A}$ generata da $\mathscr{S}$. Si verifichi che, usando la notazione $a^\sharp = a$ o a^*,

$$C^*(\mathscr{S}) = \overline{\langle a_1^\sharp \dots a_n^\sharp \,:\, a_i \in \mathscr{S}, i = 1, \dots, n, \, n \in \mathbb{N} \rangle}.$$

5. Siano $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ e $U \in B(H)$ l'operatore definito da $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, con $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base ortonormale canonica. Si mostri:
   (a) esiste un operatore unitario $V : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $U = VM_gV^*$, con $M_g \in B(L^2([0, 2\pi])$ l'operatore di moltiplicazione per la funzione $g(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
   (b) U è unitario e $\sigma(U) = \mathbb{T}$;
   (c) se $\mathscr{B} := \overline{\langle \mathbb{1}, U, U^2, \dots \rangle}$ è la sottoalgebra di Banach con unità di $B(H)$ generata da U, si ha $0 \in \sigma_{\mathscr{B}}(U)$ (sugg: se $p \in \mathscr{B}$ è un polinomio, $\langle U^* e_n, pe_n \rangle = 0$, da cui $\|U^* - p\| \geq 1$).