Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 2/5/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra con unità, e $a, \ell, r \in \mathscr{A}$ tali che $\ell a = \mathbb{1} = ar$. Verificare che allora a è invertibile.

2. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità $\mathbb{1}$. Si verifichi che $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ e $\|\mathbb{1}\| = 1$.

3. Dimostrare che se $\mathscr{A}$ è una C*-algbera con unità e $p \in \mathscr{A}$ è un proiettore, allora $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.

4. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach. Mostrare:
   (a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, la serie $e^a := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n/n!$ è convergente in $\mathscr{A}$;
   (b) dati $a, b \in \mathscr{A}$ tali che $ab = ba$, si ha $e^a e^b = e^{a+b}$.

5. Sia X uno spazio metrico compatto. Verificare che $C(X)$ separa i punti di X, cioè per ogni $x, y \in X$ distinti esiste $f \in C(X)$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

*6. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff, e $\delta_x \in \Omega(C(X))$ dato da $\delta_x(f) := f(x)$, $x \in X$. Si mostri:
   (a) $\delta_x \neq 0$ per ogni $x \in X$;
   (b) dato per noto che $C(X)$ separa i punti di X, $x \mapsto \delta_x$ è iniettiva;
   (c) $x \mapsto \delta_x$ è suriettiva (sugg.: se per assurdo $\omega \in \Omega(C(X))$ è tale che per ogni $x \in X$ esiste $f_x \in C(X)$ con $\omega(f_x) \neq f_x(x)$, posto $g_x := f_x - \omega(f_x)$ si può trovare un ricoprimento aperto $(A_{x_j})_{j=1,\dots,n}$ di X tale che $g_{x_j}(y) \neq 0$ per ogni $y \in A_{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, e posto allora $g := |g_{x_1}|^2 + \cdots + |g_{x_n}|^2 \in \ker \omega$ si ha $g^{-1} \in C(X)$ e $1 = gg^{-1} \in \ker \omega$);

7. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità. Verificare che la famiglia dei sottoinsiemi di $\Omega(\mathscr{A})$ che sono unioni arbitrarie di insiemi della forma
   $$B(a_1, \dots, a_n; V_1, \dots, V_n) := \{\omega \in \Omega(\mathscr{A}) \,:\, \omega(a_j) \in V_j,\ j = 1, \dots, n\},$$
   con $a_j \in \mathscr{A}$, $V_j \subset \mathbb{C}$ aperto, $j = 1, \dots, n$, è una topologia di Hausdorff su $\Omega(\mathscr{A})$, rispetto alla quale un net $(\omega_\alpha) \subset \Omega(\mathscr{A})$ converge a $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ se e solo se $\omega_\alpha(a) \to \omega(a)$ per ogni $a \in \mathscr{A}$.

8. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Dimostrare che l'applicazione $x \in X \mapsto \delta_x \in \Omega(C(X))$ è continua con inversa continua.

9. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra normata e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale. Verificare che $\bar{\mathscr{I}}$ è un ideale.

10. Siano X uno spazio vettoriale e $M \subset X$ un sottospazio. Si verifichi:
    (a) le operazioni
    $$\begin{aligned} (x + M) + (y + M) &:= x + y + M, \\ \lambda(x + M) &:= \lambda x + M, \end{aligned} \qquad x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},$$
    sono ben definite e dotano $X/M = \{x + M \,:\, x \in X\}$ di una struttura di spazio vettoriale;
    (b) se $X = \mathscr{A}$ è un'algebra e $M = \mathscr{I}$ un ideale, il prodotto
    $$(a + \mathscr{I})(b + \mathscr{I}) := ab + \mathscr{I}, \qquad a, b \in \mathscr{A},$$
    è ben definito e rende $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ un'algebra.