Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 23/4/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Si mostri che esiste un'isometria $U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ tale che $U\delta_n = \delta_{n+1}$ ($(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base ortonormale canonica), e che U non è unitario. Tale U è detto lo *shift unilatero*.

2. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità, $a \in \mathscr{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Si verifichi che $\sigma(a - \lambda\mathbb{1}) = \sigma(a) - \lambda := \{\mu - \lambda : \mu \in \sigma(a)\}$.

*3. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita e $H := L^2(X, \mu)$. Data $f \in L^\infty(X, \mu)$ si definisca *l'operatore di moltiplicazione* per f:

$$(M_f\psi)(x) := f(x)\psi(x), \qquad x \in X,\ \psi \in H.$$

Si dimostri:

(a) l'applicazione $f \in L^\infty \mapsto M_f \in B(H)$ è uno *-omomorfismo isometrico di C*-algebre (sugg.: per l'isometria, si ha $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi esiste $A_n \subset \{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}$ tale che $0 < \mu(A_n) < +\infty$, e se $\psi_n = \chi_{A_n}$...);

(b) $\lambda \in \sigma(M_f)$ se e solo se $\mu(\{|f - \lambda| < \varepsilon\}) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (sugg.: se $\mu(\{|f - \lambda| < 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse $(\lambda 1 - M_f)^{-1} \in B(H)$, considerare $\|(\lambda 1 - M_f)^{-1}\chi_{B_n}\|^2$ con $B_n \subset \{|f - \lambda| < 1/n\}$ tale che $0 < \mu(B_n) < +\infty$);

(c) $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ se e solo se $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.

4. Sia X uno spazio normato. Una serie $\sum_{n=0}^\infty x_n$, $x_n \in X$, è detta *assolutamente convergente* se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Mostrare:

(a) se X è di Banach, ogni serie assolutamente convergente è convergente in X;

*(b) viceversa se ogni serie assolutamente convergente è convergente in X, allora X è di Banach (sugg.: data $(x_n) \subset X$ di Cauchy, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ sia convergente, e una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente è convergente).