Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 16/4/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottospazio chiuso. Mostrare che esiste un'isometria suriettiva $j : H \to K \oplus K^\perp$.

2. Siano I un insieme e $\mu_\sharp$ la misura che conta in I. Mostrare:

   (a) data $f : I \to [0, +\infty)$, se $\sup_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha \in F} f(\alpha) < \infty$, allora l'insieme $\{\alpha \in I : f(\alpha) > 0\}$ è al più numerabile (sugg.: si ha $\sharp\{\alpha \in I : f(\alpha) \geq 1/n\} \leq n \sup_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha \in F} f(\alpha)$);

   (b) data $f : I \to [0, +\infty)$, si ha $\int_I f\, d\mu_\sharp = \sup_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha \in F} f(\alpha)$ (sugg.: se $F \in \mathscr{P}_0(I)$, $s_F := \sum_{\alpha \in F} f(\alpha)\chi_{\{\alpha\}}$ è una funzione semplice);

   (c) data $f \in L^1(I, d\mu_\sharp) =: \ell^1(I)$, e posto $\sigma_F := \sum_{\alpha \in F} f(\alpha)$, $F \in \mathscr{P}_0(I)$, si ha $\int_I f\, d\mu_\sharp = \lim_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sigma_F$ nel senso dei net su $\mathscr{P}_0(I)$, parzialmente ordinato per inclusione: $F \leq G$ se $F \subset G$ (sugg.: se $f \geq 0$, $\lim_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sigma_F = \sup_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \sigma_F$).

3. Sia $(\delta_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \ell^2(I)$ la base ortonormale canonica: $\delta_\alpha = (\delta_{\alpha\beta})_{\beta \in I}$. Senza usare il teorema sulle caratterizzazioni delle basi ortonormali, dimostrare che per ogni $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \ell^2(I)$ si ha $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \delta_\alpha$, cioè $\lim_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \|x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \delta_\alpha\| = 0$, e di conseguenza

$$c(I) := \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \,:\, x_\alpha \neq 0 \text{ solo per un insieme finito di indici } \alpha \in I\},$$

   è denso in $\ell^2(I)$.