Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 11/4/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ spazi di Hilbert. Sullo spazio vettoriale somma diretta

$$H \oplus K := \{(x, y) \, : x \in H, y \in K\},$$

i cui elementi saranno denotati con $x \oplus y := (x, y)$, si definisca

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_K, \qquad x_i \oplus y_i \in H \oplus K.$$

Verificare che $(H \oplus K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio di Hilbert, detto *somma diretta (hilbertiana)* di H e K.

*2. Siano $(H_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$, $\alpha \in I$, spazi di Hilbert, e si definisca

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha := \Big\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \, : \, x_\alpha \in H_\alpha \, \forall \alpha \in I, \, \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty \Big\}.$$

Verificare:

(a) $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite da

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I} + (y_\alpha)_{\alpha \in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in I}, \qquad \lambda (x_\alpha)_{\alpha \in I} := (\lambda x_\alpha)_{\alpha \in I};$$

(b) $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da

$$\big\langle (x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \big\rangle := \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle_\alpha.$$

Tale spazio è detto la *somma diretta* della famiglia $(H_\alpha)_{\alpha \in I}$.

3. Siano X uno spazio normato, $S \subset X$ un sottoinsieme, e $\langle S \rangle$ il sottospazio da esso generato. Mostrare che $\overline{\langle S \rangle}$ è un sottospazio chiuso di X.