Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 9/4/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi. Nei seguenti esercizi $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denota un generico spazio di misura.

1. Data $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile, verificare:
   (a) la funzione $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ è continua a destra;
   (b) se f è essenzialmente limitata, $\|f\|_\infty := \inf\{t \geq 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\} = \min\{t \geq 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$;
   (c) $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $L^\infty(X, \mu)$.

2. Sia $Y \in \mathfrak{M}$ tale che $\mu(Y^c) = 0$ e g una funzione misurabile su Y (a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$). Mostrare che se f è l'estensione di g a X definita ponendo $f(x) = 0$ se $x \in Y^c$, allora f è misurabile.

*3. Mostrare che $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. (Sugg.: data $(f_n) \subset L^\infty$ di Cauchy, sia E l'unione, su $k, m, n \in \mathbb{N}$, degli insiemi $A_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{m,n} := \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$; allora $\mu(E) = 0$ e $\ell^\infty(E^c)$ è completo.)

4. Dato uno spazio metrico (X, d), e posto $\operatorname{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$, $x \in X$, $B \subset X$, verificare che $x \in X \mapsto \operatorname{dist}(x, B)$ è continua.

5. Sia $(f_n) \subset L^1(X, \mu)$. Verificare che se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge per q.o. $x \in X$, definisce una funzione in $L^1(X, \mu)$ e
$$\int_X \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

6. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $f : X \times A \to \mathbb{C}$ una funzione tale che
   (a) $f(\cdot, y) \in L^1(X, \mu)$ per ogni $y \in A$;
   (b) esista $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in X \times A$;
   (c) esista $g \in L^1(X, \mu)$ tale che $\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)\right| \leq g(x)$ per ogni $(x, y) \in X \times A$.

   Allora la funzione $F : A \to \mathbb{C}$ definita da $F(y) := \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$, $y \in A$, è tale che esiste
$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)\, d\mu(x), \qquad y \in A.$$

7. Dimostrare che $\int_\mathbb{N} f d\mu_\sharp = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ per ogni f per cui ha senso, e che quindi $L^p(\mathbb{N}, \mu_\sharp) = \ell^p(\mathbb{N})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ ($\mu_\sharp$ è la misura che conta in $\mathbb{N}$).

8. Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ e che, se $\mu(X) < \infty$, $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. Mostrare che, usando la misura di Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.