

# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

## a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 4/4/18

Nei seguenti esercizi  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  denota un generico spazio di misura.

1. Siano  $f, g : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  misurabili tali che  $f \leq g$  q.o. Verificare che  $\int_X f \leq \int_X g$ .
2. Sia  $f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  tale che  $\int_X |f| < +\infty$ . Verificare che  $f$  è finita quasi ovunque.
3. Siano  $I \subset \mathbb{R}^n$  un intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Mostrare che esiste una successione  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  di decomposizioni di  $I$  tale che  $\delta_{k+1} \geq \delta_k$ ,  $\|\delta_k\| := \max_{Q \in \delta_k} \{\text{diam } Q\} \rightarrow 0$ , e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_f(\delta_k) = \sup_{\delta} \sigma_f(\delta), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \Sigma_f(\delta_k) = \inf_{\delta} \Sigma_f(\delta).$$

(Sugg.: se  $\delta' \geq \delta$ , si ha  $\sigma_f(\delta') \geq \sigma_f(\delta)$ ,  $\Sigma_f(\delta') \leq \Sigma_f(\delta)$ .)

4. Verificare che se  $E \subset \mathbb{R}^n$  è misurabile secondo Peano-Jordan (cioè  $\sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } P \subset E\} = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } P \supset E\}$ ) allora è misurabile secondo Lebesgue.
5. Mostrare che la misura di Lebesgue  $m$  su  $\mathbb{R}^n$  è completa, cioè che se  $N \in \mathfrak{M}(m)$  ha misura nulla e  $E \subset N$ , allora  $E \in \mathfrak{M}(m)$ .
6. Siano  $\mu$  una misura completa,  $g$  una funzione misurabile su  $X$  (a valori in uno spazio topologico  $Y$ ) e  $f : X \rightarrow Y$  una funzione uguale a  $g$  quasi ovunque. Mostrare che allora  $f$  è misurabile.