Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 28/3/18

Nei seguenti esercizi $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denota un generico spazio di misura.

1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, e si definiscano

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n, \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Si dimostri:

(a) posto $\alpha_n := \inf_{k\geq n} a_k$, $\beta_n := \sup_{k\geq n} a_k$, le successioni $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente crescente e decrescente;

(b) $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k$, $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k$;

(c) $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;

(d) $\liminf_{n\to+\infty} a_n = l'$ (risp. $\limsup_{n\to+\infty} a_n = l''$) se e solo se

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow & a_n > l' - \varepsilon \text{ (risp. } a_n < l'' + \varepsilon), \\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq \bar{n} \,: & a_n < l' + \varepsilon \text{ (risp. } a_n > l'' - \varepsilon); \end{cases}$$

(e) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ se e solo se $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = l$.

2. Siano Y un insieme e $f : X \to Y$ una funzione. Verificare che

$$\mathfrak{N} := \{E \subset Y \,:\, f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$$

è una σ-algebra in Y.

3. Verificare che ogni aperto di $\tilde{\mathbb{R}}$ è unione numerabile di intervalli della forma (a, b), $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$, con $a, b \in \mathbb{Q}$.

4. Siano $E, F \in \mathfrak{M}$ e $f, g : X \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Verificare:

(a) se $f \leq g$ allora $\int_X f \leq \int_X g$;

(b) se $E \subset F$ allora $\int_E f \leq \int_F f$;

(c) se $c \geq 0$ è una costante, allora $\int_X cf = c \int_X f$;

(d) se $\mu(\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}) = 0$ allora $\int_X f = 0$;

(e) se $\mu(E) = 0$ allora $\int_E f = 0$.

5. Sia $s : X \to [0, +\infty]$ una funzione semplice. Mostrare che ponendo $\lambda(E) := \int_E s\, d\mu$, $E \in \mathfrak{M}$, λ è una misura su $\mathfrak{M}$.