Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 20/3/18

1. Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ un sottospazio finito dimensionale. Verficare che V è chiuso.

2. Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ un net in uno spazio topologico X. Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:

   (a) se esiste un sottonet di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α);

   (b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α), allora esiste un sottonet di (x_α) convergente a x. (Sugg.: definire un ordine parziale diretto su $J := \mathscr{I}_x \times I$ tramite
   $$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$
   e definire $f : J \to I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$.)

   In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.

3. Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).

4. Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.

5. Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \to Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).

6. Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \to X$ è continua.