Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 14/3/18

1. Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a, b]$:
$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ponga
$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}).$$
Dimostrare che:
   (a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;
   (b) il net $(\sigma_\delta)_{\delta \in \Delta} \subset \mathbb{R}$ (risp. $(\Sigma_\delta)_{\delta \in \Delta}$) è non decrescente (risp. non crescente), cioè se $\delta_1 \leq \delta_2$ allora $\sigma_{\delta_1} \leq \sigma_{\delta_2}$ (risp. $\Sigma_{\delta_1} \geq \Sigma_{\delta_2}$);
   (c) f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la metrica usuale). (Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)
2. Siano X, Y, Z spazi topologici, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni. Mostrare che se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$ allora $g \circ f : X \to Z$ è continua in x_0.
3. Siano X, Y spazi topologici. Verificare che $f : X \to Y$ è continua se e solo se $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso per ogni $C \subset Y$ chiuso.
4. Mostrare che su $X = \mathbb{C}^n$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$
5. Siano X, Y spazi normati con X finito-dimensionale, e $T : X \to Y$ lineare. Dimostrare che T è limitato.