Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 8/3/18

1. Sia $X = C^1([a,b])$ e si ponga $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in X$. Verificare che $\|\cdot\|_{(1)}$ è una norma su X.
2. Mostrare che $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{(1)})$ è di Banach, mentre $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.
3. Siano $X = C^1([a,b])$, $Y = C^0([a,b])$ e $D : X \to Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:
   (a) se su X si mette la norma $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, si ha $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \to +\infty$);
   (b) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y, D non è limitato (sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) := \sin nt$).
4. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Verificare che per ogni $x, y \in X$ si ha $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
5. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $\delta > 0$. Dimostrare che le palle

   $$B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \delta\}, \qquad \bar{B}_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leq \delta\}$$

   sono, rispettivamente, aperta e chiusa (nella topologia indotta da d).
6. Siano X un insieme e B_α, $\alpha \in I$, una collezione di suoi sottoinsiemi (I insieme arbitrario di indici). Dimostrare la *dualità di De Morgan*:

   $$\Big(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha^c.$$

7. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che
   (a) $\emptyset$, X sono chiusi;
   (b) se C_α, $\alpha \in I$, sono chiusi, allora $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ è chiuso;
   (c) se $C_1, \dots, C_n$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \dots \cup C_n$ è chiuso.