Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 7/6/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto. Si mostri che $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste una successione $(x_n) \subset H$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $Ax_n - \lambda x_n \to 0$.

2. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità e ω uno stato di $\mathscr{A}$. Si verifichi
   (a) $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;
   (b) $\omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\omega(b^*b)$ per ogni $a, b \in \mathscr{A}$.

3. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con untià e $\omega, \omega' \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$. Si verifichi che ω' è dominato da ω se e solo se esiste $\varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ tale che ω è combinazione convessa di ω' e φ.

4. Siano $\mathscr{A} = M_n(\mathbb{C})$ e $E_{jk} \in \mathscr{A}$ tali che $(E_{jk})_{il} = \delta_{ji}\delta_{kl}$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Dato $\omega \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ e posto $\rho_{jk} := \omega(E_{jk})$, $j, k = 1, \dots, n$, si mostri:
   (a) $\omega(T) = \mathrm{tr}(\rho T)$ per ogni $T \in \mathscr{A}$;
   (b) $\rho \geq 0$ e $\mathrm{tr}\,\rho = 1$;
   *(c) ω è puro se e solo se esiste $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, tale che $\rho = |x\rangle\langle x|$ (cioè $\rho y = \langle x, y\rangle x$ per ogni $y \in \mathbb{C}^n$), e quindi $\omega(T) = \langle x, Tx\rangle$ per ogni $T \in \mathscr{A}$.

5. Sia π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$. Verificare che un sottospazio chiuso $K \subset H_\pi$ è invariante per π se e solo se il rispettivo proiettore ortogonale P_K appartiene a $\pi(\mathscr{A})'$.

6. Siano π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$ e $A \in \pi(\mathscr{A})'$ autoaggiunto. Si mostri che, se P è la misura spettrale associata ad A, $P(E) \in \pi(\mathscr{A})'$ per ogni boreliano $E \subset \mathbb{R}$.

7. Sia π una rappresentazione della C-algebra $\mathscr{A}$. Si mostri che π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathscr{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$ (*lemma di Schur*).