Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 16/5/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale proprio chiuso. Si verifichi:
   (a) $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| \geq 1$;
   (b) se inoltre $\|\mathbb{1}\| = 1$, allora $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = 1$.

2. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach commutativa con unità $\mathbb{1}$. Si dimostri che per ogni $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ si ha $\|\omega\| \leq 1$, e che se $\|\mathbb{1}\| = 1$ allora $\|\omega\| = 1 = \omega(\mathbb{1})$ (sugg.: se $\mathscr{I} = \ker \omega$, $|\omega(a)| \leq \|\omega(a)\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = \|a + \mathscr{I}\|$).

*3. Si dimostri:
   (a) dati $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ la serie
   $$(a * b)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
   è assolutamente convergente e $\|a*b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$; $a*b$ è detto la *convoluzione* di $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$;
   (b) definendo, per $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $a^*_n := \overline{a_{-n}}$, si ha che $\ell^1(\mathbb{Z})$, con il prodotto di convoluzione, è una *-algebra di Banach commutativa con identità;
   (c) l'elemento $\zeta := (\delta_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ è tale che $\zeta^{-1} = (\delta_{n,-1})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $\langle \zeta^n \, : \, n \in \mathbb{Z} \rangle$ è denso in $\ell^1(\mathbb{Z})$;
   (d) per ogni $\lambda \in \mathbb{T}$, $\omega_\lambda : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ definito da
   $$\omega_\lambda(a) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \lambda^n, \qquad a \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$
   è un carattere di $\ell^1(\mathbb{Z})$;
   (e) per ogni $\omega \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ esiste un'unico $\lambda \in \mathbb{T}$ tale che $\omega = \omega_\lambda$ (sugg.: $\lambda := \omega(\zeta)$);
   (f) l'applicazione $\lambda \in \mathbb{T} \mapsto \omega_\lambda \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ è biunivoca, continua e con inversa continua (cioè è un *omeomorfismo* di spazi topologici) (sugg.: l'inversa $\omega \mapsto \omega(\zeta)$ è continua da uno spazio compatto a uno di Hausdorff);
   (g) identificando, come spazi topologici, $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ con il cerchio unitario $\mathbb{T}$ tramite l'applicazione del punto (f), la trasformata di Gelfand di $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ si identifica con la funzione $\hat{a} \in C(\mathbb{T})$ data da
   $$\hat{a}(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T},$$
   cioè con la trasformata di Fourier della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.