Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 10/5/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia X uno spazio metrico compatto. Verificare che $C(X)$ separa i punti di X.

*2. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff, e $\delta_x \in \Omega(C(X))$ dato da $\delta_x(f) := f(x)$, $x \in X$. Si mostri:

   (a) dato per noto che $C(X)$ separa i punti di X, $x \mapsto \delta_x$ è iniettiva;

   (b) $x \mapsto \delta_x$ è suriettiva (sugg.: se per assurdo $\omega \in \Omega(C(X))$ è tale che per ogni $x \in X$ esiste $f_x \in C(X)$ con $\omega(f_x) \neq f_x(x)$, posto $g_x := f_x - \omega(f_x)$ si può trovare un ricoprimento aperto $(A_{x_j})_{j=1,\dots,n}$ di X tale che $g_{x_j}(y) \neq 0$ per ogni $y \in A_{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, e posto allora $g := |g_{x_1}|^2 + \cdots + |g_{x_n}|^2 \in \ker\omega$ si ha $g^{-1} \in C(X)$ e $1 = gg^{-1} \in \ker\omega$);

3. Siano X uno spazio vettoriale e $M \subset X$ un sottospazio. Si verifichi:

   (a) le operazioni
   $$\begin{aligned}(x+M)+(y+M) &:= x+y+M,\\ \lambda(x+M) &:= \lambda x + M,\end{aligned} \qquad x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},$$
   sono ben definite e dotano $X/M = \{x + M : x \in X\}$ di una struttura di spazio vettoriale;

   (b) se $X = \mathscr{A}$ è un'algebra e $M = \mathscr{I}$ un ideale, il prodotto
   $$(a+\mathscr{I})(b+\mathscr{I}) := ab + \mathscr{I}, \qquad a, b \in \mathscr{A},$$
   è ben definito e rende $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ un'algebra.

4. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra normata e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale. Verificare che $\bar{\mathscr{I}}$ è un ideale.