Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 9/5/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

*1. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita e $H := L^2(X, \mu)$. Data $f \in L^\infty(X, \mu)$ si definisca *l'operatore di moltiplicazione* per f:

$$(M_f\psi)(x) := f(x)\psi(x), \qquad x \in X,\, \psi \in H.$$

Si dimostri:

(a) l'applicazione $f \in L^\infty \mapsto M_f \in B(H)$ è uno *-omomorfismo isometrico di C*-algebre (sugg.: per l'isometria, si ha $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi esiste $A_n \subset \{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}$ tale che $0 < \mu(A_n) < +\infty$, e se $\psi_n = \chi_{A_n}$...);

(b) $\lambda \in \sigma(M_f)$ se e solo se $\mu(\{|f - \lambda| < \varepsilon\}) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (sugg.: se $\mu(\{|f - \lambda| < 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse $(\lambda 1 - M_f)^{-1} \in B(H)$, considerare $\|(\lambda 1 - M_f)^{-1}\chi_{B_n}\|^2$ con $B_n \subset \{|f - \lambda| < 1/n\}$ tale che $0 < \mu(B_n) < +\infty$);

(c) $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ se e solo se $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.

2. Dato il triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ e $k \in C(T)$, si definisca l'operatore di Volterra $K : C([0, 1]) \to C([0, 1])$:

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x, y)f(y)\,dy, \qquad f \in C([0, 1]),\, x \in [0, 1].$$

Mostrare che:

(a) effettivamente $Kf \in C([0, 1])$ se $f \in C([0, 1])$;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|K^n\| \leq \|k\|_\infty^n/n!$;

(c) per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ogni $g \in C([0, 1])$, l'*equazione di Volterra di seconda specie*

$$\int_0^x k(x, y)f(y)\,dy - \lambda f(x) = g(x), \qquad x \in [0, 1],$$

ha un'unica soluzione $f \in C([0, 1])$.

3. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità $\mathbb{1}$. Si verifichi che $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ e $\|\mathbb{1}\| = 1$.

4. Dimostrare che se $\mathscr{A}$ è una C*-algbera con unità e $p \in \mathscr{A}$ è un proiettore, allora $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.

5. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach. Mostrare:

(a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, la serie $e^a := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n/n!$ è convergente in $\mathscr{A}$;

(b) dati $a, b \in \mathscr{A}$ tali che $ab = ba$, si ha $e^a e^b = e^{a+b}$.