

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 3/5/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach con identità, $a \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Si verifichi che $\sigma(a - \lambda \mathbb{1}) = \sigma(a) - \lambda := \{\mu - \lambda : \mu \in \sigma(a)\}$.
2. Sia X uno spazio normato. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, è detta *assolutamente convergente* se $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Mostrare:
 - (a) se X è di Banach, ogni serie assolutamente convergente è convergente in X ;
 - *(b) viceversa se ogni serie assolutamente convergente è convergente in X , allora X è di Banach (sugg.: data $(x_n) \subset X$ di Cauchy, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\sum_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ sia convergente, e una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente è convergente).