

# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

## a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 2/5/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (\*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano  $H$  uno spazio di Hilbert, e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$  una successione di vettori linearmente indipendenti. Definita una successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tramite il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*:

$$f_1 := x_1, \quad f_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1, \quad f_3 := x_3 - \frac{\langle x_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle x_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2, \quad \dots$$

dimostrare che i vettori  $e_n := f_n / \|f_n\|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sono un sistema ortonormale in  $H$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

2. Verificare che se  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  è una base ortonormale di uno spazio di Hilbert  $H$ , allora l'insieme

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

è numerabile e denso in  $H$ .

- \*3. Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $e^{\delta|x|} f \in L^1(\mathbb{R})$  per qualche  $\delta > 0$ . Mostrare allora che per la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx, \quad p \in \mathbb{R}$$

ha lo sviluppo di MacLaurin (convergente)

$$\hat{f}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ip)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n dx, \quad |p| < \delta$$

(sugg.: si può scambiare l'integrale con lo sviluppo in serie di  $e^{-ipx}$  per l'esercizio 2 del 12/4/17).

4. Le *funzioni di Hermite*  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sono definite applicando il procedimento di Gram-Schmidt alle funzioni  $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n e^{-x^2/2}$  e pertanto hanno la forma  $\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ , con gli  $H_n$  polinomi di grado  $n$ , detti *polinomi di Hermite*. Dimostrare:

- (a)  $\{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$  (sugg.: se  $\psi \in \{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp$ , applicare l'esercizio 3.14 a  $f = \psi e^{-x^2/2}$ );  
(b)  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una base ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$ ;  
(c) vale la *formula di Rodrigues*:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \pi^{1/4}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

(sugg.: basta verificare, integrando per parti, che se  $H_n$  è dato dalla formula di sopra, allora  $\langle x^k e^{-x^2/2}, H_n e^{-x^2/2} \rangle = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , e  $\|H_n e^{-x^2/2}\|_2 = 1$ );

(d) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n &= \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n &= \begin{cases} \sqrt{n} \psi_{n-1}, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \\ \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \psi_n &= (2n+1) \psi_n. \end{aligned}$$

5. Si mostri che esiste un'isometria  $U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$  tale che  $U\delta_n = \delta_{n+1}$  ( $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base ortonormale canonica), e che  $U$  non è unitario. Tale  $U$  è detto lo *shift unilatero*.