Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 11/4/17

Nei seguenti esercizi $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denota un generico spazio di misura, salvo diverso avviso.

1. Siano $f, g : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ misurabili tali che $f \leq g$ q.o. Verificare che $\int_X f \leq \int_X g$.

2. Sia $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ tale che $\int_X |f| < +\infty$. Verificare che f è finita quasi ovunque.

3. Siano $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Mostrare che esiste una successione $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di decomposizioni di I tale che $\delta_{k+1} \geq \delta_k$, $\|\delta_k\| := \max_{Q\in\delta_k}\{\operatorname{diam} Q\} \to 0$, e
$$\lim_{k\to+\infty} \sigma_f(\delta_k) = \sup_\delta \sigma_f(\delta), \qquad \lim_{k\to+\infty} \Sigma_f(\delta_k) = \inf_\delta \Sigma_f(\delta).$$
(Sugg.: se $\delta' \geq \delta$, si ha $\sigma_f(\delta') \geq \sigma_f(\delta)$, $\Sigma_f(\delta') \leq \Sigma_f(\delta)$.)

4. Verificare che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan (cioè χ_E è integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}^n$) allora è misurabile secondo Lebesgue.

5. Mostrare che la misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}^n$ è completa, cioè che se $N \in \mathfrak{M}(m)$ ha misura nulla e $E \subset N$, allora $E \in \mathfrak{M}(m)$.

6. Siano μ una misura completa, g una funzione misurabile su X (a valori in uno spazio topologico Y) e $f : X \to Y$ una funzione uguale a g quasi ovunque. Mostrare che allora f è misurabile.