

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 29/3/17

1. Sia X uno spazio topologico. Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di X

$$\mathcal{B}(X) := \bigcap \{ \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X) \text{ } \sigma\text{-algebra t.c. } A \in \mathfrak{M} \forall A \subset X \text{ aperto} \}$$

è la più piccola σ -algebra su X che contiene tutti gli insiemi aperti.

2. Indicato con $Q_r(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset \mathbb{R}^n$ l' n -cubo aperto di semilato $r > 0$ e centro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si mostri che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto vale

$$A = \bigcup \{ Q_{1/k}(x) : x \in \mathbb{Q}^n \cap A, Q_{1/k}(x) \subset A \}.$$

3. Dato $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ e $n \in \mathbb{N}$, si mostri che esiste un insieme aperto $G_n \supset A$ tale che $\mu(G_n \setminus A) < 1/n$.