

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 22/3/17

1. Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ un sottospazio finito dimensionale. Verificare che V è chiuso.
2. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net in uno spazio topologico X . Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:
 - (a) se esiste un sottonet $(y_\beta)_{\beta \in J}$ di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α) ;
 - (b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α) , allora definendo un ordine parziale diretto su $J := \mathcal{I}_x \times I$ tramite

$$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$

e definendo $f : J \rightarrow I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$, si ha che $(x_{f(\beta)})_{\beta \in J}$ è un sottonet di (x_α) convergente a x .

In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.

3. Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).
4. Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.
5. Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \rightarrow Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).
6. Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua.