Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 8/3/17

1. Su $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$, si definisca

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono allineati con l'origine,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x, y \in X$$

   ($|\cdot|$ norma euclidea in $\mathbb{R}^2$). Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico.

2. Si definisca $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tramite $d(x,y) = |e^x - e^y|$, e si verifichi:
   (a) d è una metrica su $\mathbb{R}$;
   (b) la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definita da $x_n = -n$ è di Cauchy ma non è convergente rispetto alla metrica d.

3. Verificare che $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati.

4. Mostrare che $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{(1)})$ è di Banach, mentre $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.