Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 7/3/17

1. Sia $X = C^1([a,b])$ e si ponga $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in X$. Verificare che $\|\cdot\|_{(1)}$ è una norma su X.

2. Siano $X = C^1([a,b])$, $Y = C^0([a,b])$ e $D : X \to Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:

   (a) se su X si mette la norma $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, si ha $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \to +\infty$);

   (b) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y, D non è limitato (sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) := \sin nt$).

3. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T. Dimostrare:

   (a) se $T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;

   (b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (sugg.: se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);

   (c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.