Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 11/5/16

1. Sia $T \in B(H)$, H spazio di Hilbert. Mostrare che $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.
2. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto e tale che esista $C > 0$ per cui $\|Ax\| \geq C\|x\|$ per ogni $x \in H$. Si mostri:
   (a) $\ker A = \{0\}$;
   (b) $\operatorname{ran} A$ è denso in H;
   (c) $\operatorname{ran} A$ è chiuso;
   (d) A è invertibile.
3. Siano μ_1, μ_2 misure di Borel regolari finite su uno spazio metrico X. Mostrare che per ogni $p \in [1, +\infty)$, e per ogni funzione boreliana limitata $f : X \to \mathbb{C}$ esiste una successione $(f_n) \subset C_b(X)$ tale che $f_n \to f$ sia in $L^p(X, \mu_1)$ che in $L^p(X, \mu_2)$.
4. Verificare che l'applicazione $\tilde{S}_f : H \times H \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Bor}(X)$, definita a lezione, è sesquilineare.
5. Verifcare che per il calcolo funzionale boreliano $\tilde{\rho} : \mathrm{Bor}(X) \to B(H)$, definito a lezione, vale $\tilde{\rho}(\bar{f}) = \tilde{\rho}(f)^*$.