Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 10/5/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia X uno spazio metrico compatto. Verificare che $C(X)$ separa i punti di X.

*2. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff, e $\delta_x \in \Omega(X)$ dato da $\delta_x(f) := f(x)$, $x \in X$. Si mostri:
   (a) dato per scontato che $C(X)$ separa i punti di X, $x \mapsto \delta_x$ è iniettiva;
   (b) $x \mapsto \delta_x$ è suriettiva (sugg.: se per assurdo $\omega \in \Omega(C(X))$ è tale che per ogni $x \in X$ esiste $f_x \in C(X)$ con $\omega(f_x) \neq f_x(x)$, posto $g_x := f_x - \omega(f_x)$ si possono trovare punti $x_1, \dots, x_n \in X$ e un ricoprimento aperto $(A_j)_{j=1,\dots,n}$ di X tale che $g_{x_j}(y) \neq 0$ per ogni $y \in A_j$, $j = 1, \dots, n$, e posto allora $g := |g_{x_1}|^2 + \dots + |g_{x_n}|^2 \in \ker\omega$ si ha $g^{-1} \in C(X)$ e $1 = gg^{-1} \in \ker\omega$);
   (c) X è omeomorfo a $\Omega(C(X))$.

3. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ un sottoinsieme, e

$$C^*(\mathscr{S}) := \bigcap \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ C*-sottoalgebra contenente } \mathscr{S}\}.$$

   la C*-sottoalgebra di $\mathscr{A}$ generata da $\mathscr{S}$. Si verifichi che, usando la notazione $a^\sharp = a$ o a^*,

$$C^*(\mathscr{S}) = \overline{\langle a_1^\sharp \dots a_n^\sharp \,:\, a_i \in \mathscr{S}, i = 1, \dots, n,\, n \in \mathbb{N}\rangle}.$$

4. Siano $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ e $U \in B(H)$ l'operatore definito da $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, con $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base ortonormale canonica. Si mostri:
   (a) esiste un operatore unitario $V : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $U = VM_gV^*$, con $M_g \in B(L^2([0, 2\pi])$ l'operatore di moltiplicazione per la funzione $g(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
   (b) U è unitario e $\sigma(U) = \mathbb{T}$;
   (c) se $\mathscr{B} := \overline{\langle \mathbb{1}, U, U^2, \dots \rangle}$ è la sottoalgebra di Banach con unità di $B(H)$ generata da U, si ha $0 \in \sigma_{\mathscr{B}}(U)$ (sugg: se $p \in \mathscr{B}$ è un polinomio in U, $\langle U^*e_n, pe_n\rangle = 0$, da cui $\|U^* - p\| \geq 1$).

5. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità, e $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ elementi normali a due a due commutanti. Posto $\mathscr{B} := C^*(\{\mathbb{1}, a_1, \dots, a_n\})$, si mostri:
   (a) $\Omega(\mathscr{B})$ è omeomorfo a un sottoinsieme chiuso $X \subset \sigma(a_1) \times \dots \times \sigma(a_n) \subset \mathbb{C}^n$ (lo *spettro congiunto* di $a_1, \dots, a_n$) (sugg.: si consideri $\omega \in \Omega(\mathscr{B}) \mapsto (\omega(a_1), \dots, \omega(a_n)) \in \mathbb{C}^n$);
   (b) esiste un unico *-isomorfismo $\rho : C(X) \to \mathscr{B}$ tale che $\rho(\iota_k) = a_k$, dove $\iota_k \in C(X)$ è la funzione $\iota_k(\lambda) := \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ (*calcolo funzionale continuo congiunto* di $a_1, \dots, a_n$).

6. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ tale che esista $\rho : C(\sigma(A)) \to M_n(\mathbb{C})$ *-omomorfismo iniettivo unitale tale che $\rho(\iota) = A$, $\iota(\lambda) = \lambda$. Mostrare:
   (a) $P_\lambda := \rho(\chi_{\{\lambda\}})$, $\lambda \in \sigma(A)$, è un proiettore, e si ha $P_\lambda P_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$;

(b) vale

$$\rho(f) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda, \qquad f \in C(\sigma(A)),$$

da cui in particolare $\mathbb{1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda$, $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$;

(c) P_λ è il proiettore sull'autospazio di A associato all'autovalore $\lambda \in \sigma(A)$;

(d) A è diagonalizzabile tramite matrici unitarie.