# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
# a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 27/4/16

1. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità $\mathbb{1}$. Si verifichi che $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ e $\|\mathbb{1}\| = 1$.

2. Dimostrare che se $\mathscr{A}$ è una C*-algbera con unità e $p \in \mathscr{A}$ è un proiettore, allora $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.

3. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach. Mostrare:

   (a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, la serie $e^a := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n/n!$ è convergente in $\mathscr{A}$;

   (b) dati $a, b \in \mathscr{A}$ tali che $ab = ba$, si ha $e^a e^b = e^{a+b}$.

4. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e $\Omega(\mathscr{A}) = \{\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \text{ carattere}\}$ lo spettro di Gelfand di $\mathscr{A}$. Si mostri che

   (a) la famiglia $\tau$ di sottoinsiemi di $\Omega(\mathscr{A})$ che sono unioni arbitrarie di insiemi della forma

   $$B(a_1, \dots, a_n; V_1, \dots, V_n) := \{\omega \in \Omega(\mathscr{A}) \,:\, \omega(a_1) \in V_1, \dots, \omega(a_n) \in V_n\},$$

   dove $a_i \in \mathscr{A}$, e $V_i \subset \mathbb{C}$ aperto, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, è una topologia di Hausdorff su $\Omega(\mathscr{A})$;

   (b) un net $(\omega_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega(\mathscr{A})$ converge a $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ nella topologia $\tau$ se e solo se $\omega_\alpha(a) \to \omega(a)$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;

   (c) per ogni $a \in \mathscr{A}$ la trasformata di Gelfand $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $\omega \mapsto \omega(a)$, è continua;

   (d) $\tau$ è la più debole topologia su $\Omega(\mathscr{A})$ tale che tutte le funzioni $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $a \in \mathscr{A}$, sono continue.

5. Siano $X$ uno spazio vettoriale e $M \subset X$ un sottospazio. Si verifichi:

   (a) le operazioni

   $$\begin{aligned} (x + M) + (y + M) &:= x + y + M, \\ \lambda(x + M) &:= \lambda x + M, \end{aligned} \qquad x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

   sono ben definite e dotano $X/M = \{x + M \,:\, x \in X\}$ di una struttura di spazio vettoriale;

   (b) se $X = \mathscr{A}$ è un'algebra e $M = \mathscr{I}$ un ideale, il prodotto

   $$(a + \mathscr{I})(b + \mathscr{I}) := ab + \mathscr{I}, \qquad a, b \in \mathscr{A},$$

   è ben definito e rende $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ un'algebra.

6. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra normata e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale. Verificare che $\bar{\mathscr{I}}$ è un ideale.

7. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale proprio. Si verifichi:

   (a) $\|\mathbb{1} + z\| \geq 1$ per ogni $z \in \mathscr{I}$;

   (b) se $\mathscr{I}$ è un'ideale proprio chiuso, $\mathbb{1} + \mathscr{I}$ è l'identità di $\mathscr{A}/\mathscr{I}$;

   (c) se inoltre $\|\mathbb{1}\| = 1$, allora $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = 1$.