Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 26/4/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Si mostri che esiste un'isometria $U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ tale che $U\delta_n = \delta_{n+1}$ ($(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base ortonormale canonica), e che U non è unitario. Tale U è detto lo *shift unilatero*.

2. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità, $a \in \mathscr{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Si verifichi che $\sigma(a-\lambda\mathbb{1}) = \sigma(a)-\lambda := \{\mu - \lambda \,:\, \mu \in \sigma(a)\}$.

*3. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita e $H := L^2(X,\mu)$. Data $f \in L^\infty(X,\mu)$ si definisca *l'operatore di moltiplicazione* per f:

$$(M_f\psi)(x) := f(x)\psi(x), \qquad x \in X,\, \psi \in H.$$

Si dimostri:

(a) l'applicazione $f \in L^\infty \mapsto M_f \in B(L^2)$ è uno *-omomorfismo isometrico di C*-algebre (sugg.: per l'isometria, si ha $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi se $\psi = \chi_{\{|f|>\|f\|_\infty - 1/n\}} \dots$);

(b) $\lambda \in \sigma(M_f)$ se e solo se $\mu(\{|f-\lambda| < \varepsilon\}) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (sugg.: se $\mu(\{|f-\lambda| < 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse $(\lambda 1 - M_f)^{-1} \in B(H)$, considerare $\|(\lambda 1 - M_f)^{-1}\chi_{\{|f-\lambda|<1/n\}}\|^2$);

(c) $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ se e solo se $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.

4. Sia X uno spazio normato. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, è detta *assolutamente convergente* se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Mostrare:

(a) se X è di Banach, ogni serie assolutamente convergente è convergente in X;

*(b) viceversa se ogni serie assolutamente convergente è convergente in X, allora X è di Banach (sugg.: data $(x_n) \subset X$ di Cauchy, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ sia convergente).

5. Dato il triangolo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le x \le 1\}$ e $k \in C(T)$, si definisca l'operatore di Volterra $K : C([0,1]) \to C([0,1])$:

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x,y) f(y)\, dy, \qquad f \in C([0,1]),\, x \in [0,1].$$

Mostrare che:

(a) effettivamente $Kf \in C([0,1])$ se $f \in C([0,1])$;

(b) esiste $M > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|K^n\| \le M^n/n!$;

(c) per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ogni $g \in C([0,1])$, l'*equazione di Volterra di seconda specie*

$$\int_0^x k(x,y) f(y)\, dy - \lambda f(x) = g(x), \qquad x \in [0,1],$$

ha un'unica soluzione $f \in C([0,1])$.