Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 20/4/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano H uno spazio di Hilbert, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una successione di vettori linearmente indipendenti. Definita una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tramite il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*:
$$f_1 := x_1, \quad f_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1, \quad f_3 := x_3 - \frac{\langle x_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle x_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2, \quad \dots$$
dimostrare che i vettori $e_n := f_n/\|f_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, sono un sistema ortonormale in H tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

2. Verificare che se $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H, allora l'insieme
$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \,:\, \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\, k = 1, \dots, n,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
è numerabile e denso in H.

*3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $e^{\delta|x|} f \in L^1(\mathbb{R})$ per qualche $\delta > 0$. Mostrare allora che la trasformata di Fourier
$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx}\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}$$
di f si estende ad una funzione analitica nella striscia $\{p \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} p| < \delta\}$ e che si ha lo sviluppo di MacLaurin
$$\hat{f}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ip)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n\, dx, \qquad |p| < \delta$$
(sugg.: l'estensione di $\hat{f}$ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann per l'esercizio 6 del 12/4/16, e si può scambiare l'integrale con lo sviluppo in serie di e^{-ipx} per l'esercizio 5 del 12/4/16).

4. Le *funzioni di Hermite* $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, sono definite applicando il procedimento di Gram-Schmidt alle funzioni $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ e pertanto hanno la forma $\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$, con gli H_n polinomi di grado n, detti *polinomi di Hermite*. Dimostrare:
   (a) $\{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ (sugg.: se $\psi \in \{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp$, applicare l'esercizio 3.14 a $f = \psi e^{-x^2/2}$);
   (b) $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$;
   (c) vale la *formula di Rodrigues*:
$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}\pi^{1/4}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$
   (sugg.: basta verificare, integrando per parti, che se H_n è dato dalla formula di sopra, allora $\langle x^k e^{-x^2/2}, H_n e^{-x^2/2}\rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $\|H_n e^{-x^2/2}\|_2 = 1$);

(d) si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)\psi_n=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right)\psi_n=\begin{cases}\sqrt{n}\,\psi_{n-1}, & n\geq 1,\\ 0, & n=0,\end{cases}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)\psi_n=(2n+1)\psi_n.$$

5. Dimostrare che applicando il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([0,+\infty))$ alle funzioni $x\mapsto x^n e^{-x}$ si ottengono funzioni $x\mapsto L_n(x)e^{-x}$, con gli L_n polinomi di grado n detti *polinomi di Laguerre*, che formano una base ortonormale in $L^2([0,+\infty))$.