Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 19/4/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottospazio chiuso. Mostrare che H è isometricamente isomorfo a $K \oplus K^\perp$ (cioè esiste $j : H \to K \oplus K^\perp$ isometria lineare suriettiva).

2. Sia $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

   (a) Se $x = (x_n) \in H$, verificare che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$ ha raggio di convergenza $r \geq 1$.

   (b) Dato $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, verificare che posto $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \lambda^n$, $x \in H$, si ha $f \in H^*$.

   (c) Determinare $y \in H$ tale che $f(x) = \langle y, x \rangle$ per ogni $x \in H$, e calcolare $\|f\|$.

3. Sia $(\delta_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \ell^2(I)$ la base ortonormale canonica: $\delta_\alpha = (\delta_{\alpha\beta})_{\beta \in I}$. Senza usare il teorema sulle caratterizzazioni delle basi ortonormali, dimostrare che per ogni $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \ell^2(I)$ si ha $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \delta_\alpha$, cioè $\lim_{F \in \mathscr{P}_0(I)} \|x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \delta_\alpha\| = 0$.

4. Mostrare che, se $x \in H$ e $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subset H$ è un sistema ortonormale, l'insieme $\{\alpha \in I : \langle e_\alpha, x \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile (sugg.: si ha $\sharp\{\alpha \in I : |\langle e_\alpha, x \rangle| \geq 1/n\} \leq n^2 \sum_{\alpha \in I} |\langle e_\alpha, x \rangle|^2$).

*5. Dimostrare che una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H infinito-dimensionale non è una base di Hamel, e che una base di Hamel di H ha cardinalità più che numerabile.