# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
# a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 12/4/16

1. Sia $I$ un insieme. Dimostrare che $\int_I f d\mu_\sharp = \sum_{\alpha \in I} f(\alpha)$ per ogni $f$ per cui ha senso, e che quindi $L^p(I, \mu_\sharp) = \ell^p(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ ($\mu_\sharp$ è la misura che conta in $I$). Che succede se al posto di $\mu_\sharp$ si usa $\delta_{x_0}$?

2. Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ e che, se $\mu(X) < \infty$, $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. Mostrare che, usando la misura di Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

3. Dato uno spazio metrico $(X, d)$, e posto $\mathrm{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$, $x \in X$, $B \subset X$, verificare:

   (a) $x \in X \mapsto \mathrm{dist}(x, B)$ è continua;

   (b) se $C$ è chiuso e $x \notin C$, allora $\mathrm{dist}(x, C) > 0$.

4. Siano $(X, d)$ uno spazio metrico, e $\mu$ una misura di Borel su $X$. Mostrare che $C_b(X)$ è chiuso in $L^\infty(X, \mu)$ (sugg.: ricordare la dimostrazione di completezza di $L^\infty$). Dare esempi in cui $C_b(X) = L^\infty(X, \mu)$ e in cui $C_b(X) \subsetneq L^\infty(X, \mu)$.

5. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e $(f_n) \subset L^1(X, \mu)$. Verificare che se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge per q.o. $x \in X$, definisce una funzione in $L^1(X, \mu)$ e
$$\int_X \Big( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

6. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $f : X \times A \to \mathbb{C}$ una funzione tale che

   (a) $f(\cdot, y) \in L^1(X, \mu)$ per ogni $y \in A$;

   (b) esista $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in X \times A$;

   (c) esista $g \in L^1(X, \mu)$ tale che $\left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq g(x)$ per ogni $(x, y) \in X \times A$.

   Allora la funzione $F : A \to \mathbb{C}$ definita da $F(y) := \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ , $y \in A$, è tale che esiste
$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) \, d\mu(x), \qquad y \in A.$$