Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 6/4/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Mostrare che esiste una successione $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di decomposizioni di I tale che $\delta_{k+1} \geq \delta_k$, $\max_{Q\in\delta_k}\{\operatorname{diam} Q\} < 1/k$, e

$$\lim_{k\to+\infty} \sigma_f(\delta_k) = \sup_\delta \sigma_f(\delta), \qquad \lim_{k\to+\infty} \Sigma_f(\delta_k) = \inf_\delta \Sigma_f(\delta).$$

(Sugg.: se $\delta' \geq \delta$, si ha $\sigma_f(\delta') \geq \sigma_f(\delta)$, $\Sigma_f(\delta') \leq \Sigma_f(\delta)$.)

2. Verificare che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan (cioè $\inf\{m(P) : P \in \mathscr{E}, E \subset P\} = \sup\{m(P) : P \in \mathscr{E}, P \subset E\}$) allora è misurabile secondo Lebesgue.

3. Mostrare che la misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}^n$ è completa, cioè che se $N \in \mathfrak{M}(m)$ ha misura nulla e $E \subset N$, allora $E \in \mathfrak{M}(m)$.

4. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $Y \in \mathfrak{M}$ tale che $\mu(Y^c) = 0$ e g una funzione misurabile su Y (a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$). Mostrare:
   (a) se f è l'estensione di g a X definita ponendo $f(x) = 0$ se $x \in Y^c$, allora f è misurabile;
   (b) se μ è completa (cioè tutti i sottoinsiemi di insiemi di misura nulla sono misurabili) e f è una qualunque estensione di g a X, allora f è misurabile.

5. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Verificare:
   (a) se $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile, la funzione $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ è continua a destra;
   (b) se f è essenzialmente limitata, $\|f\|_\infty = \min\{t \geq 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$;
   (c) $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $L^\infty(X, \mu)$.

*6. Mostrare che $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. (Sugg.: data $(f_n) \subset L^\infty$ di Cauchy, sia E l'unione, su $k, m, n \in \mathbb{N}$, degli insiemi $A_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{m,n} := \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$; allora $\mu(E) = 0$ e $\ell^\infty(E^c)$ è completo.)