Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 16/3/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

*1. Sia
$$Q := \{x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \,:\, |x_n| \leq 1/n,\, \forall n \in \mathbb{N}\},$$
il *cubo di Hilbert*, e sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Q$ una successione. Dimostrare:

(a) esiste una sottosuccessione $(x_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ di $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che la successione numerica $(x_{k(j),n})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge ad un $x_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (sugg.: si costruiscano iterativamente sottosuccessioni convergenti $(x_{k_n(j),n})_{j\in\mathbb{N}}$ di $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $(x_{k_{n+1}(j),n})_{j\in\mathbb{N}}$ sia sottosuccessione di $(x_{k_n(j),n})_{j\in\mathbb{N}}$, e si ponga $k(j) := k_j(j)$);

(b) posto $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ha $x \in Q$ e $\|x_{k(j)} - x\|_2 \to 0$ per $j \to +\infty$.

2. Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \to Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).

3. Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).

4. Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.

5. Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \to X$ è continua.