Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 15/3/16

1. Siano X, Y spazi topologici, $D \subset X$ con $x_0 \in X$ come punto di accumulazione, $f : D \to Y$. Si ha $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solo se per ogni net $(x_\alpha) \subset D \setminus \{x_0\}$ tale che $x_\alpha \to x_0$, si ha $f(x_\alpha) \to \ell$.

2. Siano (X, d), (Y, ρ) spazi metrici, $D \subset X$ con $x_0 \in X$ come punto di accumulazione, $f : D \to Y$. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in D$ e $0 < d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, allora $\rho(f(x), \ell) < \varepsilon$.

3. Siano X, Y, Z spazi topologici, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni. Mostrare che se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$ allora $g \circ f : X \to Z$ è continua in x_0.

4. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. Verificare che f è continua in X se e solo se per ogni chiuso $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

5. Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ un sottospazio finito dimensionale. Verficare che V è chiuso.

6. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net in uno spazio topologico X. Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:

   (a) se esiste un sottonet $(y_\beta)_{\beta \in J}$ di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α);

   (b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α), allora definendo un ordine parziale diretto su $J := \mathscr{I}_x \times I$ tramite
   $$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$
   e definendo $f : J \to I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$, si ha che $(x_{f(\beta)})_{\beta \in J}$ è un sottonet di (x_α) convergente a x.

   In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.