Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 9/3/16

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia (X,d) metrico. Verificare che $|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$ per ogni $x,y,z \in X$.

*2 Sia (X,d) uno spazio metrico. Dimostrare:

   (a) se $(\bar{X},\bar{d})$ e $j : X \to \bar{X}$ sono il completamento di (X,d) e l'immersione isometrica definiti a lezione, e se $(\tilde{X},\tilde{d})$ è uno spazio metrico completo e $k : X \to \tilde{X}$ è un'isometria con $k(X)$ denso in $\tilde{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \to \tilde{X}$ tale che $\phi(j(x)) = k(x)$ per ogni $x \in X$ (*unicità del completamento*) (sugg.: si definisca prima $\phi : j(X) \to k(X)$ ponendo $\phi(j(x)) := k(x)$, allora ϕ è isometrica, poi $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ e quindi...);

   (b) sia $(X, \|\cdot\|)$ normato, e sul suo completamento $(\bar{X},\bar{d})$ (considerando X come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma), si ponga

$$\begin{aligned} \bar{x}+\bar{y} &:= \lim_{n\to+\infty} j(x_n+y_n), \\ \alpha\bar{x} &:= \lim_{n\to+\infty} j(\alpha x_n), \qquad\qquad \alpha\in\mathbb{C}, \bar{x},\bar{y}\in\bar{X}; \\ \|\bar{x}\|^- &:= \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|, \end{aligned}$$

   dove $(x_n),(y_n) \subset X$ sono tali che $j(x_n) \to \bar{x}$, $j(y_n) \to \bar{y}$; allora le operazioni di spazio vettoriale e la norma su $\bar{X}$ sono ben defnite, $j : X \to \bar{X}$ è lineare, e $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è uno spazio di Banach la cui norma $\|\cdot\|^-$ è indotta da $\bar{d}$.

3. Siano (X,d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $\delta > 0$. Dimostrare che le palle

$$B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \delta\}, \qquad \bar{B}_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leq \delta\}$$

   sono, rispettivamente, aperta e chiusa (nella topologia indotta da d).

4. Siano X un insieme e B_α, $\alpha \in I$, una collezione di suoi sottoinsiemi (I insieme arbitrario di indici). Dimostrare la *dualità di De Morgan*:

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha^c.$$

5. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che

   (a) $\emptyset$, X sono chiusi;

   (b) se C_α, $\alpha \in I$, sono chiusi, allora $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ è chiuso;

   (c) se $C_1,\dots,C_n$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ è chiuso.

6. Siano (X,d) uno spazio metrico, e $x \in X$. Verificare che le famiglie di insiemi

$$\mathscr{B}_x^1 := \{B_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^2 := \{\bar{B}_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^3 := \{B_{1/n}(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

   sono basi di intorni di x.