Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 8/3/16

1. Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a,b]$:

$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ponga

$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}).$$

Dimostrare che:

(a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;

(b) il net $(\sigma_\delta)_{\delta \in \Delta} \subset \mathbb{R}$ (risp. $(\Sigma_\delta)_{\delta \in \Delta}$) è non decrescente (risp. non crescente), cioè se $\delta_1 \leq \delta_2$ allora $\sigma_{\delta_1} \leq \sigma_{\delta_2}$ (risp. $\Sigma_{\delta_1} \geq \Sigma_{\delta_2}$);

(c) f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la metrica usuale). (Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)

2. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathbb{R}_+$, A insieme di indici arbitrario. Mostrare che

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sup_{F \in \mathscr{P}_0(A)} \sum_{\alpha \in F} x_\alpha$$

($\mathscr{P}_0(A)$ insieme delle parti finite di A).

3. Verificare che $(\ell^1(A), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(A), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati.

4. Mostrare che $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{(1)})$ è di Banach, mentre $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.