Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2015-16

G. Morsella

Esercizi del 2/3/16

1. Siano $X = C^1([a,b])$, $Y = C^0([a,b])$ e $D : X \to Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:
   (a) se su X si mette la norma $\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, D è limitato e $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \to +\infty$);
   (b) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y, D non è limitato.

2. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T. Dimostrare:
   (a) se $T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;
   (b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (sugg.: se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);
   (c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.

3. Siano X, Y spazi normati con X finito-dimensionale, e $T : X \to Y$ lineare. Dimostrare che T è limitato.

4. Su $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$, si definisca
$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono allineati con l'origine,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x, y \in X$$
   ($|\cdot|$ norma euclidea in $\mathbb{R}^2$). Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico.

5. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente. Mostrare che (x_n) è di Cauchy.