

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 5/6/14

1. Siano

$$D_q := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|^2 dx < +\infty \right\}, \quad D_p := \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \exists \psi' \in L^2(\mathbb{R}) \},$$

e siano $q : D_q \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $p : D_p \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definiti da

$$(q\psi)(x) = x\psi(x), \quad (p\psi)(x) = -i\psi'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Posto $\psi_\sigma(x) := (2\pi)^{-1/4} \sigma^{-1/2} e^{-x^2/4\sigma^2}$, verificare

- (a) $\psi_\sigma \in D_q \cap D_p$;
 - (b) $\|\psi_\sigma\|_2 = 1$;
 - (c) esistono costanti $A, B > 0$ tali che $\Delta_{\psi_\sigma} q = \|q\psi_\sigma\|_2 = A\sigma$, $\Delta_{\psi_\sigma} p = \|p\psi_\sigma\|_2 = B\sigma^{-1}$;
 - (d) q e p non sono limitati.
2. Sia (U, V) una realizzazione delle relazioni di Weyl (1-dimensionali). Verificare che posto $W(\alpha + i\beta) := e^{i\alpha\beta/2} U(\alpha)V(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si hanno le *relazioni di Weyl in forma complessa*

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(z_1, z_2)} W(z_1 + z_2), \quad W(z)^* = W(-z), \quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

dove $\sigma(z_1, z_2) = \text{Im} \langle z_1, z_2 \rangle$ (prodotto scalare standard su $\mathbb{C}$), e che, viceversa, dati $W(z)$, $z \in \mathbb{C}$, soddisfacenti queste relazioni, si ottiene una realizzazione delle relazioni di Weyl ponendo $U(\alpha) := W(\alpha)$, $V(\beta) := W(i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Sia H uno spazio di Hilbert. Mostrare che $\sigma : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\sigma(x, y) := \text{Im} \langle x, y \rangle$ è una forma simplettica non degenera (cioè tale che $\sigma(x, y) = 0$ per ogni $y \in H$ se e solo se $x = 0$) su H .
4. Verificare che, munendo lo spazio $\mathscr{W}_0$ delle funzioni a supporto finito da $\mathbb{C}$ in se stesso del prodotto e dello $*$ definiti a lezione, si ottiene effettivamente $(fg)^* = g^* f^*$ per ogni $f, g \in \mathscr{W}_0$.
5. Sia $\mathscr{A}$ una $*$ -algebra, normata con una norma che soddisfa l'identità C^* . Verificare che il completamento di $\mathscr{A}$ rispetto a tale norma è una C^* -algebra.
6. Sia $\mathscr{A}$ C^* -algebra con unità. Si mostri che, per ogni $a \in \mathscr{A}$,

$$\|a\| = \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ rappresentazione ciclica di } \mathscr{A}\}.$$

7. Sia $\mathscr{W}$ il completamento di $\mathscr{W}_0$ definito a lezione e sia $\tilde{\mathscr{W}}$ una C^* -algebra generata da una realizzazione $\{\tilde{W}(z) : z \in \mathbb{C}\}$ delle relazioni di Weyl (in forma complessa). Si mostri:

- (a) $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{W}(z_i) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{z_i} \right\|$ (sugg.: se $\tilde{\pi}$ è una rappresentazione ciclica di $\tilde{\mathscr{W}}$, allora $\pi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{z_i}) := \tilde{\pi}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{W}(z_i))$ è una rappresentazione ciclica di $\mathscr{W}_0$);
- (b) esiste un unico $*$ -omomorfismo $\phi : \mathscr{W} \rightarrow \tilde{\mathscr{W}}$ tale che $\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{z_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{W}(z_i)$;
- (c) $\phi : \mathscr{W} \rightarrow \tilde{\mathscr{W}}$ è uno $*$ -isomorfismo isometrico.

8. Mostrare che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.