

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 27/5/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia π una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{A}$. Verificare che un sottospazio chiuso $K \subset H_\pi$ è invariante per π se e solo se il rispettivo proiettore ortogonale P_K appartiene a $\pi(\mathcal{A})'$.
2. Siano π una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{A}$ e $A \in \pi(\mathcal{A})'$ autoaggiunto. Si mostri che, se P è la misura spettrale associata ad A , $P(I) \in \pi(\mathcal{A})'$ per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
- *3. Sia π una rappresentazione della C*-algebra $\mathcal{A}$. Si mostri che π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$ (*lemma di Schur*).
4. Siano $\mathcal{A}$ una C*-algebra con unità e $\omega, \omega' \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Si verifichi che ω' è dominato da ω se e solo se esiste $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che ω è combinazione convessa di ω' e φ .
5. Sia $\mathcal{A}$ C*-algebra commutativa con unità. Mostrare che $\Omega(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ (sugg.: $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$ se e solo se $\pi_\omega(a) = \omega(a)\mathbb{1}$).
6. Siano $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ e $E_{jk} \in \mathcal{A}$ tali che $(E_{jk})_{il} = \delta_{ji}\delta_{kl}$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Dato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ e posto $\rho_{jk} := \omega(E_{jk})$, $j, k = 1, \dots, n$, si mostri:
 - (a) $\rho \geq 0$ e $\text{tr } \rho = 1$;
 - (b) $\omega(T) = \text{tr}(\rho T)$ per ogni $T \in \mathcal{A}$;
 - * (c) ω è puro se e solo se esiste $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $\rho = |x\rangle\langle x|$ (cioè $\rho y = \langle x, y \rangle x$ per ogni $y \in \mathbb{C}^n$), e quindi $\omega(T) = \langle x, Tx \rangle$ per ogni $T \in \mathcal{A}$.