

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 23/5/14

*1. Siano $C \subset [0, 1]$ l'insieme di Cantor e $f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ la *scala del diavolo*, una funzione monotona non decrescente tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1] \setminus C$. Detta m_f l'associata misura di Lebesgue-Stieltjes e considerato l'operatore $M_\ell \in B(L^2([0, 1], m_f))$ di moltiplicazione per la funzione $\iota(\lambda) = \lambda$, si dimostri:

- (a) $\sigma(M_\ell) = C$;
- (b) $\sigma_p(M_\ell) = \emptyset$;
- (c) la misura spettrale μ_1 di M_ℓ indotta dalla funzione $\psi = 1$ non è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

2. Siano $\mathcal{A}$ una C^* -algebra con unità e ω uno stato di $\mathcal{A}$. Si verifichi

- (a) $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ per ogni $a \in \mathcal{A}$;
- (b) $\omega(b^* a^* a b) \leq \|a\|^2 \omega(b^* b)$ per ogni $a, b \in \mathcal{A}$.

3. Verificare che l'applicazione $a \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\omega(a) \in B(H_\omega)$ definita nella dimostrazione del teorema GNS è una rappresentazione.

4. Siano $\mathcal{A}$ una C^* -algebra, e $\pi_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow B(H_\alpha)$, $\alpha \in I$, rappresentazioni tali che $\sup_{\alpha \in I} \|\pi_\alpha(a)\| < +\infty$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Mostrare:

- (a) per ogni $a \in \mathcal{A}$, l'operatore $\oplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha(a) : \oplus_{\alpha \in I} H_\alpha \rightarrow \oplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ definito da

$$\oplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha(a)(x_\alpha)_{\alpha \in I} := (\pi_\alpha(a)x_\alpha)_{\alpha \in I}, \quad (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \oplus_{\alpha \in I} H_\alpha,$$

è limitato, e $\|\oplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha(a)\| \leq \sup_{\alpha \in I} \|\pi_\alpha(a)\|$;

- (b) $a \in \mathcal{A} \mapsto \oplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha(a) \in B(\oplus_{\alpha \in I} H_\alpha)$ è una rappresentazione di $\mathcal{A}$ (detta la *somma diretta* delle π_α).