# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
# a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 16/5/14

1. Sia $T \in B(H)$, $H$ spazio di Hilbert. Mostrare che $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.
2. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto e tale che esista $C > 0$ per cui $\|Ax\| \geq C\|x\|$ per ogni $x \in H$. Si mostri:
   (a) $\ker A = \{0\}$;
   (b) $\operatorname{ran} A$ è denso in $H$;
   (c) $\operatorname{ran} A$ è chiuso;
   (d) $A$ è invertibile.
3. Siano $\mu_1$, $\mu_2$ misure di Borel regolari finite su uno spazio metrico $X$. Mostrare che per ogni funzione boreliana limitata $f : X \to \mathbb{C}$ esiste una successione $(f_n) \subset C_b(X)$ tale che $f_n \to f$ sia in $L^1(X, \mu_1)$ che in $L^1(X, \mu_2)$.
4. Verificare che l'applicazione $S_f : H \times H \to \mathbb{C}$, $f \in \operatorname{Bor}(X)$, definita a lezione, è sesquilineare.
5. Verifcare che per il calcolo funzionale boreliano $\tilde{\rho} : \operatorname{Bor}(X) \to B(H)$, definito a lezione, vale $\tilde{\rho}(\bar{f}) = \tilde{\rho}(f)^*$.
6. Siano $P_1$, $P_2 \in B(H)$ proiettori ortogonali. Mostrare che sono equivalenti:
   (a) $P_1 \leq P_2$;
   (b) $\operatorname{ran} P_1 \subset \operatorname{ran} P_2$;
   (c) $P_1 P_2 = P_1 = P_2 P_1$.