

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 9/5/14

1. Siano \mathcal{A} un'algebra di Banach, e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una *-sottoalgebra. Posto $\mathcal{B}_{aa} := \{b \in \mathcal{B} : b = b^*\}$, si verifichi che $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}_{aa}} + i\overline{\mathcal{B}_{aa}}$.

2. Mostrare che:

(a) i polinomi trigonometrici

$$\left\{ \theta \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta} : c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

sono densi in $C_p([0, 2\pi]) := \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ (sugg.: $C_p([0, 2\pi]) \simeq C(\mathbb{T})$);

(b) posto $e_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2([0, 2\pi])$;

(c) la serie di Fourier di una $f \in L^2([0, 2\pi])$ converge a f in $L^2([0, 2\pi])$.

3. Mostrare che:

(a) i polinomi sono densi in $C([a, b])$ (teorema di Weierstrass);

(b) i polinomi di Legendre $(P_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, ottenuti tramite il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([-1, 1])$ a partire dalle funzioni $x \mapsto x^\ell$, sono una base ortonormale in $L^2([-1, 1])$;

(c) si ha

$$P_\ell(x) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad x \in [-1, 1], \ell \in \mathbb{N}.$$

4. Siano X, Y spazi metrici con X completo, e $f : X \rightarrow Y$ isometrica. Mostrare che $f(X) \subset Y$ è chiuso.

5. Siano \mathcal{B} un'algebra di Banach con unità, e $a \in \mathcal{B}$ tale che $\sigma(a) = \{0\}$ (un tale elemento è detto *topologicamente nilpotente*), e sia $\mathcal{A} := \langle \mathbb{1}, a, a^2, \dots \rangle \subset \mathcal{B}$ la sottoalgebra chiusa di \mathcal{B} generata da a . Si mostri:

(a) $x \in \mathcal{A}$ se e solo se $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a^k$ (serie convergente in \mathcal{B});

(b) $\Omega(\mathcal{A}) = \{\omega_0\}$, con $\omega_0(x) = \lambda_0$;

(c) la trasformata di Gelfand $\hat{\cdot} : \mathcal{A} \rightarrow C(\Omega(\mathcal{A}))$ non è iniettiva.