Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 29/4/14

1. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e $\Omega(\mathscr{A}) = \{\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \text{ carattere}\}$ lo spettro di Gelfand di $\mathscr{A}$. Si mostri che
   (a) la famiglia τ di sottoinsiemi di $\Omega(\mathscr{A})$ che sono unioni arbitrarie di insiemi della forma
   $$B(a_1, \dots, a_n; V_1, \dots, V_n) := \{\omega \in \Omega(\mathscr{A}) \,:\, \omega(a_1) \in V_1, \dots, \omega(a_n) \in V_n\},$$
   dove $a_i \in \mathscr{A}$, e $V_i \subset \mathbb{C}$ aperto, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, è una topologia su $\Omega(\mathscr{A})$;
   (b) un net $(\omega_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega(\mathscr{A})$ converge a $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ nella topologia τ se e solo se $\omega_\alpha(a) \to \omega(a)$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;
   (c) per ogni $a \in \mathscr{A}$, la sua trasformata di Gelfand $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $\omega \mapsto \omega(a)$, è continua;
   (d) τ è la più debole topologia su $\Omega(\mathscr{A})$ tale che tutte le funzioni $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $a \in \mathscr{A}$, sono continue.

2. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale proprio. Si verifichi:
   (a) $\|\mathbb{1} + z\| \geq 1$ per ogni $z \in \mathscr{I}$;
   (b) se $\mathscr{I}$ è un'ideale proprio chiuso, $\mathbb{1} + \mathscr{I}$ è l'identità di $\mathscr{A}/\mathscr{I}$;
   (c) se inoltre $\|\mathbb{1}\| = 1$, allora $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = 1$.

3. Siano X uno spazio vettoriale e $M \subset X$ un sottospazio. Si verifichi:
   (a) le operazioni
   $$\begin{aligned} (x + M) + (y + M) &:= x + y + M, \\ \lambda(x + M) &:= \lambda x + M, \end{aligned} \qquad x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},$$
   sono ben definite e dotano $X/M = \{x + M \,:\, x \in X\}$ di una struttura di spazio vettoriale;
   (b) se $X = \mathscr{A}$ è un'algebra e $M = \mathscr{I}$ un ideale, il prodotto
   $$(a + \mathscr{I})(b + \mathscr{I}) := ab + \mathscr{I}, \qquad a, b \in \mathscr{A},$$
   è ben definito e rende $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ un'algebra.

4. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in uno spazio metrico X. Si mostri che se esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$, allora $x_n \to x$.