

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 22/4/14

1. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Si verifichi che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

2. Dato il triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ e $k \in C(T)$, si definisca l'operatore di Volterra $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$:

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x, y)f(y) dy, \quad f \in C([0, 1]), x \in [0, 1].$$

Mostrare che:

- (a) effettivamente $Kf \in C([0, 1])$ se $f \in C([0, 1])$;
- (b) esiste $M > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|K^n\| \leq M^n/n!$;
- (c) per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ogni $g \in C([0, 1])$, l'equazione di Volterra di seconda specie

$$\int_0^x k(x, y)f(y) dy - \lambda f(x) = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

ha un'unica soluzione $f \in C([0, 1])$.

3. Sia $\mathcal{A}$ una C*-algebra con unità $\mathbb{1}$. Si verifichi che $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ e $\|\mathbb{1}\| = 1$.
4. Sia p un proiettore in una C*-algebra. Mostrare che $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.
5. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach. Mostrare:

- (a) per ogni $a \in \mathcal{A}$, la serie $e^a := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n/n!$ è convergente in $\mathcal{A}$;
- (b) dati $a, b \in \mathcal{A}$ tali che $ab = ba$, si ha $e^a e^b = e^{a+b}$.