

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 15/4/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Si mostri che l'operatore $U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$, definito da $U(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$, detto l'operatore di *shift unilatero*, è un'isometria, ma non un unitario.
2. Siano $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach e $a \in \mathcal{A}$. Si verifichi che, per ogni $\mu \in \mathbb{C}$, si ha $\sigma(a - \mu 1) = \sigma(a) - \mu := \{\lambda - \mu : \lambda \in \sigma(a)\}$.
- *3. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finita e $H := L^2(X, \mu)$. Data $f \in L^\infty(X, \mu)$ si definisca l'operatore di moltiplicazione per f :

$$(M_f \psi)(x) := f(x)\psi(x), \quad x \in X, \psi \in H.$$

Si dimostri:

- (a) $M_f \in B(L^2)$;
- (b) $\lambda \in \sigma(M_f)$ se e solo se $\mu(\{|f - \lambda| < \varepsilon\}) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (sugg.: se $\mu(\{|f - \lambda| < 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse $(\lambda 1 - M_f)^{-1} \in B(H)$, considerare $\|(\lambda 1 - M_f)^{-1} \chi_{\{|f - \lambda| < 1/n\}}\|^2$);
- (c) $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ se e solo se $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.
- (d) $f \in L^\infty \mapsto M_f \in B(L^2)$ è uno *-omomorfismo isometrico di C*-algebre, cioè è lineare, moltiplicativo, isometrico e rispetta lo * (sugg.: per l'isometria, si ha $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi se $\psi = \chi_{\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}} \dots$);