Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 4/4/14

1. Siano X uno spazio normato e $S \subset X$ un sottoinsieme. Indicando con

$$\langle S \rangle := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,:\, x_i \in S,\, \alpha_i \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

il sottospazio di X generato da S, mostrare che $\overline{\langle S \rangle}$ è un sottospazio chiuso di X (detto ovviamente il *sottospazio chiuso* generato da S).

2. Siano H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottospazio chiuso. Mostrare che H è isometricamente isomorfo a $K \oplus K^\perp$ (cioè esiste $j : H \to K \oplus K^\perp$ isometria lineare suriettiva).

3. Sia $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

   (a) Se $x = (x_n) \in H$, verificare che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$ ha raggio di convergenza $r \geq 1$.

   (b) Dato $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, verificare che posto $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \lambda^n$, $x \in H$, si ha $f \in H^*$.

   (c) Determinare $y \in H$ tale che $f(x) = \langle y, x \rangle$ per ogni $x \in H$, e calcolare $\|f\|$.