

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica  
a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 4/4/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (\*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ,  $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$  spazi di Hilbert. Sullo spazio vettoriale somma diretta

$$H \oplus K := \{(x, y) : x \in H, y \in K\},$$

i cui elementi saranno denotati con  $x \oplus y := (x, y)$ , si definisca

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_K, \quad x_i \oplus y_i \in H \oplus K.$$

Verificare che  $(H \oplus K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno spazio di Hilbert, detto *somma diretta (hilbertiana)* di  $H$  e  $K$ .

- \*2. Siano  $(H_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ , spazi di Hilbert, e si definisca

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in H_\alpha \forall \alpha \in I, \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty \right\}.$$

Verificare:

- (a)  $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$  è uno spazio vettoriale con le operazioni definite da

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I} + (y_\alpha)_{\alpha \in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in I}, \quad \lambda(x_\alpha)_{\alpha \in I} := (\lambda x_\alpha)_{\alpha \in I};$$

- (b)  $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$  è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da

$$\langle (x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \rangle := \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle_\alpha.$$

3. Siano  $X, Y$  spazi prehilbertiani, e  $j : X \rightarrow Y$  un'applicazione che preserva i prodotti scalari. Mostrare che  $j$  è lineare (sugg.: calcolare  $\|j(x+y) - j(x) - j(y)\|^2$ ,  $\|j(\alpha x) - \alpha j(x)\|^2$ ).
4. Mostrare che  $\ell^2(I)$  è il completamento dello spazio prehilbertiano

$$c_c(I) := \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in \mathbb{C}, x_\alpha \neq 0 \text{ solo per un insieme finito di } \alpha \in I\}$$

con il prodotto scalare  $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in I} \bar{x}_\alpha y_\alpha$ .