

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 28/3/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Verificare:
 - (a) se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile, la funzione $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ è continua a destra;
 - (b) se f è essenzialmente limitata, $\|f\|_\infty = \min\{t \geq 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$;
 - (c) $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $L^\infty(X, \mu)$;
 - *(d) $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. (Sugg.: data $(f_n) \subset L^\infty$ di Cauchy, sia E l'unione, su $k, m, n \in \mathbb{N}$, degli insiemi $A_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{m,n} := \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$; allora $\mu(E) = 0$ e $\ell^\infty(E^c)$ è completo.)
2. Sia I un insieme. Dimostrare che $\int_I f d\mu_\# = \sum_{\alpha \in I} f(\alpha)$ per ogni f per cui ha senso, e che quindi $L^p(I, \mu_\#) = \ell^p(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ ($\mu_\#$ è la misura che conta in I). Che succede se al posto di $\mu_\#$ si usa δ_{x_0} ?
3. Dato uno spazio metrico (X, d) , e posto $\text{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$, $x \in X$, $B \subset X$, verificare che $x \in X \mapsto \text{dist}(x, B)$ è continua.
4. Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ e che, se $\mu(X) < \infty$, $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. Mostrare che, usando la misura di Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.
5. Siano (X, d) uno spazio metrico, e μ una misura di Borel su X . Mostrare che $C_b(X)$ è chiuso in $L^\infty(X, \mu)$ (sugg.: ricordare la dimostrazione di completezza di L^∞ , es. 1.(d)). Dare esempi in cui $C_b(X) = L^\infty(X, \mu)$ e $C_b(X) \subsetneq L^\infty(X, \mu)$.